

4. On a $f(x) = \frac{1+j \tan x}{1-j \tan x} = \frac{(1+j \tan x)^2}{1+\tan^2 x} = \frac{1-\tan^2 x+2j \tan x}{1+\tan^2 x}$, donc la partie réelle de $f(x)$ est $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ et la partie imaginaire $\frac{2 \tan x}{1+\tan^2 x}$.

Mais d'autre part, en multipliant numérateur et dénominateur de $f(x)$ par $\cos x$, on constate que

$$f(x) = \frac{\cos x + j \sin x}{\cos x - j \sin x} = \frac{\exp(jx)}{\exp(-jx)} = \exp(2jx) : \text{le module est } 1, \text{ l'argument est } 2x.$$

Et enfin, en identifiant les parties réelles et imaginaires avec ces deux méthodes de calcul de $f(x)$

$$\text{on obtient les relations } \cos(2x) = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \text{ et } \sin(2x) = \frac{2 \tan x}{1+\tan^2 x}.$$

□